26. Метод Фурье (метод разделения переменных)

26.1. Метод Фурье для одномерного волнового уравнения

Гармонические сочетания звуков, производимых музыкальными инструментами, привлекали внимание людей с древнейших времен. Одним из основных законов, управляющих гармонией, в древнегреческой науке считался закон числовых отношений: каждому звуку соответствовало число, паре звуков — пропорция, тройке звуков — тройная пропорция и т.д.

Те из вас, кто учился музыке, наверное знают, что если струну прижать посередине, то она будет издавать звук, на октаву выше. А если на одной трети, то это будет звук, который выше на октаву + квинту. Собственно, именно поэтому и появляется созвучие: оно связано с наличием у звучащей струны не только *основного тона*, но и *обертонов*, которые отвечают долям этой струны (половине, трети, четверти и т.д.). Созвучность, гармоничность звучания как раз и определяются наличием у двух звуков общих обертонов.

С математической точки зрения звучание струны связано с ее колебаниями, которые мы наблюдаем практически невооруженным глазом как некоторые формы веретенообразного вида. Поскольку эти колебания описываются с достаточной степенью точности уравнением

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

нам бы следовало понять, какие решения соответствуют таким колебаниям. Наиболее естественно предположить, что при этих колебаниях форма струны сохраняется и описывается некоторой функцией $y(x)$, а колебания состоят в том, что эта форма в разные моменты времени видна «с разным коэффициентом», коэффициент описывается, как функция $h(t)$. Таким образом, обсуждаемые нами колебания логично считать функциями вида

$$u(t,x) = h(t)\, y(x).$$

Подставив эту функцию в уравнение, получаем

$$\ddot{h}(t)\, y(x) = a^2 h(t)\, y''(x).$$

И после деления на $a^2 h(t)$и на $y(x)$:

$$\frac{\ddot{h}(t)}{a^2 h(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = \lambda.$$

Это соотношение чрезвычайно примечательно. Обратите внимание: слева стоит функция, зависящая только от t (и не зависящая от x). Справа — функция, зависящая только от x (и не зависящая от t). А посередине — знак равенства, т. е. это на самом деле одна и та же функция. Поскольку она, с одной стороны, не зависит от t, а с другой — не зависит от x, она вообще ни от чего не зависит, и является константой. Обозначим ее через λ. Тогда наше соотношение мгновенно «разваливается» в пару обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$y''(x) = \lambda y(x),$$
$$\ddot{h}(t) = a^2 \lambda h(t).$$

Оказывается, первое из этих уравнений можно снабдить еще и дополнительными условиями. Ведь струна закреплена, т. е.

$$u(t,0) = u(t,l) = 0.$$

И подстановка сюда нашего решения дает:

$$y(0)\,h(t) = y(l)\,h(t) = 0.$$

Здесь возможно два варианта. Либо $h(t) \equiv 0$ (и тогда $u(t,x) \equiv 0$), но этот случай нас не интересует, так как о том, что однородное уравнение имеет тривиальное решение, мы знаем безо всякой науки, и оно нас меньше всего интересует, так как описывает не колеблющуюся структуру, а покоящуюся. Либо, $h(t) \neq 0$ и тогда $y(0) = y(l) = 0$. Эта пара

$$y''(x) = \lambda y(x),$$
$$y(0) = y(l) = 0,$$

образует спектральную задачу.

Спектральная задача — это задача определения тех λ, при которых уравнение имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее граничным условиям.

Как решать спектральную задачу? Есть два способа решения.

1 Рассматривать варианты:

- $\lambda > 0$ ($\lambda = \omega^2$), что не дает никаких решений, кроме тривиальных;
- $\lambda < 0$ ($\lambda = -\omega^2$), что дает при $\lambda_n = -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ собственные функции $y_n(x) = C\sin\frac{\pi n x}{l}$;
- $\lambda = 0$, что тоже не дает нетривиальных решений.

2 Вместо рассмотрения различных возможностей относительно знакаλ, считать всегда $\lambda = \omega^2$, где ω может быть комплексным.

В этом случае общее решение уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x},$$

подстановка его в первое условие дает

$$y(0) = C_1 = -C_2,$$

откуда

$$C_1 = -C_2,$$

а подстановка во второе

$$y(l) = C_1\left(e^{\omega l} - e^{-\omega l}\right) = 0$$

приводит к альтернативе: либо $C_1 = 0$ (и тогда решение тривиальное), либо $e^{\omega l} = -e^{-\omega l}$, т.е. $e^{2\omega l} = 1$. Для того, что бы четко разобраться, к чему это уравнение нас обязывает, вспомним, как решается уравнение $e^z = 1$. Подставляя $z = a + ib$, получаем $e^z = e^a(\cos b + i\sin b) = 1$. Откуда $e^a = 1$ (модули чисел совпадают), а значит $a = 0$. А тогда

$\cos b + i\sin b = 1$, что может иметь место только когда $b = 2\pi n$. Таким образом, решением уравнения $e^z = 1$ является набор чисел $z = 2\pi n i$.

Возвращаясь к нашей задаче, мы получаем

$$2\omega l = 2\pi n i, \quad \omega = \frac{\pi n i}{l}, \quad \lambda = \lambda_n = -\frac{\pi^2 n^2}{l^2},$$

т. е. то же, что и в «вещественных» рассуждениях.

$$y = C\left(e^{\frac{\pi n i x}{l}} - e^{-\frac{\pi n i x}{l}}\right) = \tilde{C}\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Итак, наша спектральная задача имеет следующее решение: собственные значения равны

$$\lambda_n = -\frac{\pi^2 n^2}{l^2},$$

собственная функции имеют вид

$$y_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Подставляя найденные λ_n в уравнение $\ddot{h} = a^2\lambda h$, получаем, что

$$h_n(t) = A_n\cos\frac{\pi n a t}{l} + B_n\sin\frac{\pi n a t}{l},$$

и, таким образом, решение уравнения струны интересующего нас вида описываются формулой

$$u_n(t,x) = \sin\frac{\pi n x}{l}\left(A_n\cos\frac{\pi n a t}{l} + B_n\sin\frac{\pi n a t}{l}\right).$$

Число $\dfrac{\pi n a}{l}$ — частота колебаний — как раз определяет высоту звука. Как видим, оно очень тесно связано с формой колебаний, которая описывается функцией $\sin\dfrac{\pi n x}{l}$. Нетрудно увидеть, что n как раз и есть число «веретен», которые мы видим. Поскольку сумма решений является решением, мы получаем следующее семейство решений волнового уравнения:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n x}{l}\left(A_n\cos\frac{\pi n a t}{l} + B_n\sin\frac{\pi n a t}{l}\right). \tag{26.1}$$

Отличительной чертой этой формулы является то, что она не является конечной. Она представляет собой ряд из бесконечного числа членов.

Для того, чтобы соотнести эту формулу с решениями, которые мы обсуждали раньше, попробуем подставить нашу формулу в начальные условия (ведь решения и начальные условия находятся во взаимно однозначном соответствии). Подставляя в формулу $t = 0$, получаем

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

А после дифференцирования формулы решения по t (пока формального):

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\frac{\pi n a}{l}\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Мы получили задачу: как разложить функцию (т. е. представить ее в виде суммы) по синусам? Отметим, что задача эта нетривиальная: представление решения в виде ряда (26.1) было получено еще в конце XVIII века, его знали и Бернулли, и Эйлер, и Д'Аламбер, и эта проблема даже стояла в центре довольно серьезного научного спора между Эйлером и Д'Аламбером о том, что такое функция. Эйлер считал, что это кривая, нарисованная произвольным движением руки. Д'Аламбер — что это произвольная формула, аналитическое выражение. Поэтому общим решением «с позиции Эйлера» является формула распостраняющихся волн, а с позиции Д'Аламбера — и ряд (26.1). Собственно спор был, по большому счету разрешен, французским математиком Фурье, который показал, что функция и ряд — одно и то же. Но для этого надо было понять, как по функции строить ряд. И Фурье нашел формулы для этих коэффициентов. Именно поэтому метод разделения переменных называют **методом Фурье**. Итак, ключевым моментом оказалось сделанное Фурье наблюдение о том, что интеграл от произведения разных синусов равен нулю.

Таким образом мы исследовали задачу о колебаниях струны:

$$\begin{gathered}
u_{tt} = u_{xx}, \\
u(0,x) = \varphi(x), \\
u_t(0,x) = \psi(x), \\
u(t,0) = u(t,l) = 0,
\end{gathered}$$

и, пользуясь методом разделения переменных, получили представления решения в виде ряда (26.1), где

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx, \quad B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Коэффициенты A_n, B_n найдены путем подстановки решения в начальные условия и использования того что интеграл от произведения разных синусов по отрезку $[0,l]$ равен нулю:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\pi n a}{l}\sin\frac{\pi n x}{l}.$$

26.3. Сходимость ряда Фурье, выражающего решение волнового уравнения

Завершая вопрос о разделении переменных, вернемся к волновому уравнению. Здесь, в отличие от уравнения теплопроводности, мы не можем вот так сразу, простыми рассуждениями обосновать сходимость ряда. Самое «грубое» соображение состоит в том, что для сходимости необходимо, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| < \infty,$$

тогда ряд сходится абсолютно и равномерно, и тогда $u(t,x)$ непрерывна. Если же условия на A_n, B_n более жесткие:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |A_n| < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |B_n| < \infty,$$

то ряды для производных тоже сходятся и $u(t,x)$ дважды непрерывно дифференцируема.

К сожалению, в естественных предположениях о гладкости

$$\varphi(x) \in C^2([0,l]), \quad \psi(x) \in C^1([0,l]),$$

вышеуказанными свойствами коэффициенты Фурье A_n, B_n, вообще говоря, не обладают.

Напомним: если функция дифференцируемая, то ее коэффициенты Фурье убывают быстрее $1/k$.

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{\pi k}{l}dx = -\frac{2}{\pi k}\int_0^l \varphi(x)\,d\cos\frac{\pi kx}{l} =$$

$$= \underbrace{-\frac{2}{\pi k}\varphi(x)\cos\frac{\pi kx}{l}\Big|_0^l}_{=0} + \underbrace{\frac{2}{\pi k}\int_0^l \varphi'(x)\,d\cos\frac{\pi kx}{l}dx}_{\to 0 \text{ при } k\to\infty}.$$

Таким образом, для непрерывно дифференцируемой $\varphi(x)$ — $A_k = o\left(\dfrac{1}{k}\right)$, а для дважды непрерывно дифференцируемой — $A_k = o\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$. Аналогично и для непрерывно дифференцируемой $\psi(x)$

$$B_k = \frac{1}{\pi k a} o\left(\frac{1}{k}\right) = o\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Эти условия обеспечивают сходимость $\sum A_k$ и $\sum B_k$, а значит и самому ряду для $u(t,x)$, но не позволяют ничего сказать о гладкости полученного решения. Для того чтобы обеспечить сходимость рядов для производных, введем заведомо завышенные предположения о гладкости $\varphi(x)$ и $\psi(x)$:

$$\varphi(x) \in C^4([0,l]), \quad \psi(x) \in C^3([0,l]).$$

Впрочем, эти предположения можно чуть ослабить, воспользовавшись понятием *гельдеровой гладкости*, и тогда достаточно предполагать, что

$$\varphi(x) \in C^{(3+\varepsilon)}([0,l]), \quad \psi(x) \in C^{(2+\varepsilon)}([0,l]).$$

Функция φ имеет **гельдерову гладкость** α, $(0 < \alpha < 1)$, если $\dfrac{\varphi(x) - \varphi(y)}{|x-y|^{\alpha}} \leqslant C$.

Для функций, имеющих гельдерову гладкость α, коэффициенты Фурье $\varphi_k \sim \left(\dfrac{1}{k^{\alpha}}\right)$, поэтому для функций гладкости $n+\alpha$ (n–ая производная является α–гельдеровой0, коэффициенты Фурье убывают как $k^{-(n+\alpha)}$.